Jean-Louis Basdevant

Principes variationnels de la physique

4e édition

de boeck SUPÉRIEUR

Jean-Louis Basdevant

Principes variationnels de la physique

4e édition

de boeck SUPÉRIEUR

Du même auteur

Basdevant J.-L., *Introduction à la physique quantique.* 2e éd.
Basdevant J.-L., *La physique quantique et ses applications*
Basdevant J.-L., *15 leçons de mécanique quantique*
Basdevant J.-L., *Les mathématiques de la physique quantique*

jean-louis.basdevant@polytechnique.edu

En couverture :
Dans cette image prise par le télescope spatial Hubble, pratiquement tous les objets brillants sont des galaxies de l'amas géant Abell 370 entourées par des arcs, mirages gravitationnels géants. Cet amas de galaxies est tellement massif et compact que son champ gravitationnel focalise la lumière des galaxies situées derrière lui. Il en résulte des images étirées sur des arcs, simple effet de focalisation analogue à ce que l'on peut observer au travers d'un verre d'eau en regardant des lumières de la ville la nuit. L'amas Abell 370 est à 5 milliards d'années-lumière dans la constellation du Dragon. Le spectre de ces arcs est très fortement déplacé vers le bleu par rapport à celui des étoiles de l'amas car la lumière focalisée provient d'étoiles très jeunes et chaudes au début de leur évolution. (Crédits photo NASA, ESA/Hubble, HST Frontier Fields)
Premières notes des Variations Goldberg de Jean-Sébastien Bach. D.R.

Maquette intérieure : Hervé Soulard / Nexeme
Mise en page intérieure de l'auteur
Maquette et mise en page de la couverture : SCM / Toulouse

Dépôt légal :
Bibliothèque royale de Belgique : 2022/13647/042
Bibliothèque nationale, Paris : avril 2022
ISBN : 978-2-8073-3981-1

Table des matières

Avant-propos

Remerciements

En 2014, j'ai publié chez Vuibert "*Les Principes variationnels en physique*", texte des amphis que j'ai eu la chance de faire aux élèves de l'École Polytechnique.

En écrivant cette nouvelle version, j'ai perfectionné les chapitres de base que l'on trouvera dans la table des matières, et j'ai pu insérer un chapitre sur la découverte fondamentale des premières ondes gravitationnelles qui ont été observées expérimentalement un siècle après la prévision d'Einstein, lors d'une détection directe de ces ondes le 14 septembre 2015, confirmée le 11 février 2016, par les détecteurs des laboratoire LIGO et Virgo. Il s'agit certainement du plus considérable effort de recherche fondamentale, à la fois théorique et expérimentale, de l'histoire, et restera comme la découverte physique la plus importante et la plus marquante du début du XXI^e siècle.

Je remercie vivement le Professeur Christoph Kopper, qui a pris la succession de ce cours à l'Ecole polytechnique et qui a eu la patience de se livrer à une relecture critique de mon manuscrit initial. Je dois beaucoup à David Langlois, Professeur associé à l'Ecole Polytechnique qui m'a permis de profiter de son cours et de son livre sur la Relativité Générale. Je suis extrêmement reconnaissant à André Rougé et à James Rich pour de multiples conversations qui m'ont éclairé tout au long de la rédaction de ce texte.

Je tiens à remercier Jean-Michel Bony, Jean-Pierre Bourguignon et Alain Guichardet. Tous trois, avec une patience que n'égalait que leur clarté, ont su m'expliquer les subtilités mathématiques du sujet, ce qui m'a permis, au bout du compte, d'évacuer, à ce niveau, autant de complications mathématiques que possible.

Jean-Louis Basdevant
Paris, décembre 2021.

Présentation

Les principes variationnels, nés avec Fermat (1601-1665), Maupertuis (1698-1759), Euler (1707-1783) et Lagrange (1736-1813), ont marqué la suite de l'oeuvre de Galilée (1564-1642) et de Newton (1642-1727) dans le basculement de la physique de l'antiquité vers la physique contemporaine.

Les penseurs et les bâtisseurs de l'antiquité étaient attirés par l'optimalité des phénomènes et de leurs applications. Archimède étudia la forme optimale à donner aux coques de bateaux, Aristote, dans un domaine plus métaphysique, imaginait que les orbites planétaires sont des cercles car leur rotondité, qui n'a ni origine ni terme, doit émaner d'un créateur qui les veut éternelles.

Nous devons l'idée d'optimalité naturelle d'un phénomène naturel, à Héron d'Alexandrie [1], au Ier siècle, qui expliqua ses observations expérimentales grâce un raisonnement géométrique : la lumière suit, dans son parcours entre entre plusieurs miroirs, le chemin le plus court.

Cette vision des choses, très contemporaine, disparut ensuite des considérations scientifiques pendant quinze siècles, pour ressurgir dans les Principes Variationnels, qui forment maintenant le cadre des théories physiques, et dans le Calcul Variationnel, sujet particulièrement fécond des mathématiques.

Le pas en avant apparaît dans une remarque étonnante de Fermat en 1661 :

> *Le plus probable est que la nature agit toujours par les moyens les plus aisés, c'est-à-dire ou par les lignes les plus courtes, lorsqu'elles n'emportent pas plus de temps, ou en tout cas par le temps le plus court, afin d'acourcir son travail et de venir plus tôt à bout de son opération.*

Il élaborait ainsi une *Méthode pour la recherche du maximum et du minimum* [2], qui fondait les lois de l'optique géométrique. Cette remarque apparut en coïncidence avec un essor important des mathématiques, avec le calcul différentiel, et cela aboutit, quelques décennies plus tard, aux travaux d'Euler et de Lagrange sur la mécanique, en 1744, à partir du Principe de Moindre Action de Maupertuis. Ces principes sont de la même veine que l'idée d'Héron d'Alexandrie.

La liste des physiciens et mathématiciens célèbres qui ont depuis laissé leur nom à cette œuvre est considérable. Ce domaine forme maintenant le cadre conceptuel de la physique théorique. Il a inspiré les fondateurs de la physique statistique et de la physique quantique, est devenu un outil indispensable de la théorie quantique des champs et il est à la base de la relativité générale et de la cosmologie. Il est également à l'origine de quantité d'applications étonnantes en mathématiques pures et appliquées [3].

On trouve la même ligne de pensée en médecine et en biologie, dans les principes de maximisation en biologie de l'évolution (on peut voir l'évolution comme une maximisation d'entropie [4]), ou dans le développement de la génétique des populations dans une évolution Darwinienne.

Ajoutons que, depuis le début du XXe siècle, avec les développements successifs des moyens de communication avec les ondes électromagnétiques, de l'électronique et de ses avancées, de la mécanique quantique, se sont développées des applications vertigineuses comme la théorie de l'Information, ou de la Communication, de Claude Shannon (1916-2001), ingénieur et mathématicien américain qui en est le “père”, avec son article fondateur

---

1. Mathématicien et physicien génial du Ier siècle de notre ère, il avait notamment construit la première machine à vapeur, *l'éolipyle*.
2. Œuvres de Fermat, publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry, Gauthier-Villars, 1896 (Tome troisième, extrait pp. 121-123)
3. Le sujet est remarquablement traité par Jean-Pierre Bourguignon dans la référence [7].
4. A.W.F. Edwards, Philosophy of Biology, Handbook of the Philosophy of Science.

A Mathematical Theory of Communication publié en 1948 [5], qui représente une gigantesque activité, aussi bien scientifique que technique, que nos sociétés ne peuvent ignorer, et qui trouve une partie de ses bases dans la notion d'Entropie de Boltzmann, dont nous parlerons dès le chapitre 1. Le "Numérique" devient un terme omniprésent dans la société actuelle. L'Information quantique est un secteur actuel d'activité tant des chercheurs que des entreprises industrielles.

Nous avons reporté quelques détails historiques de l'histoire "ancienne" de la physique, entre l'antiquité et la véritable naissance moderne de cette science aux XVe et XVIe siècles, au dernier chapitre du livre.

Les principes variationnels

Les principes variationnels sont, en quelque sorte, une forme mathématique du superlatif. Cette formulation se fait en demandant que la valeur d'une grandeur typique d'un système soit la meilleure, pour la performance effectivement réalisée par ce système, par rapport à ce qu'elle vaudrait si l'on imaginait une performance différente. Ils sont d'un usage courant en mathématiques appliquées.

Dans une certaine mesure, les principes variationnels, par leur universalité dans le monde des choses, peuvent apparaître comme une "structure" générale de la physique, voire, un jour, des autres sciences naturelles comme la biologie, la psychologie ou les phénomènes sociaux. Ils jouent un rôle dans toutes les technologies contemporaines.

La forme première d'une théorie en physique explique un phénomène par une loi locale. Telles sont les lois de la dynamique de Newton, les lois de Descartes-Snell, et les lois différentielles de l'électromagnétisme ou de la thermodynamique. Une fois la première pierre de la théorie mise à jour, et après les premières exploitations de la découverte, on en recherche les principes sous-jacents et leurs liens avec d'autres schémas.

Les principes variationnels permettent d'exprimer les lois physiques sous une forme *globale*. Cette forme permet, bien entendu, de retrouver le détail des lois locales, mais on découvre qu'elle est plus riche et puissante. Elle permet de dégager les principes fondamentaux des lois qu'elle manipule. Cela donne une vision plus féconde au plan des fondements comme à celui des applications.

Les Grecs caractérisaient un segment de droite comme le chemin le plus court joignant ses extrémités. Dire, de même, que le cercle est la ligne la plus courte qui entoure une aire plane donnée est une façon équivalente et plus générale de définir cet être géométrique.

De la même façon, en électricité, dire que le courant électrique se distribue dans un réseau de façon telle que la puissance perdue sous forme de chaleur est la plus petite possible est une description de la circulation du courant qui recouvre quantité de cas particuliers, nous le verrons. La proposition qu'un système physique agit (ou évolue) de façon telle qu'une certaine fonction qui lui est reliée soit minimum ou maximum, est souvent le point de départ d'une recherche théorique générale.

Ainsi, les principes variationnels présentent les phénomènes naturels comme des problèmes d'optimisation sous contraintes, ou encore de compromis entre les effets de causes en conflit.

5. Claude E. Shannon, *A Mathematical Theory of Communication*, Bell System Technical Journal, vol 27, no 3, Juillet 1948, pp. 379-423 ; vol. 27, no 4, octobre 1948, pp. 623-666

Ces principes sont présents dans pratiquement tous les domaines de la physique (on pourra lire à ce propos les chapitres I,26 et II,19 du cours de Feynman réf.[4], et le livre de Yourgrau et Mandelstam réf.[5]).

Principes de Fermat et de Maupertuis

La formalisation mathématique de telles idées, nous est d'abord venue de Pierre de Fermat (1601-1665), comme nous le verrons au chapitre 1. Son principe de l'optique géométrique est un principe de *temps* minimum, qui donne la loi de la réfraction de Snell-Descartes, et mène également à la compréhension des mirages et rayons courbes.

De fait, tout a démarré vers 1637 dans une vive critique adressée à Descartes par Fermat à propos de la notion de démonstration. L'irritation de Fermat faisait suite à la publication de la *Dioptrique* dans le *Discours de la Méthode*. Fermat, magistrat toulousain, était mathématicien, pas physicien, mais il s'intéressait à la structure des lois physiques[6]. Le manque de rigueur de la "pseudo-démonstration" de Descartes, irritait Fermat, qui était convaincu que l'on pouvait faire les choses correctement : "Il me semble qu'un peu de géométrie pourra nous tirer d'affaire". Quand il parvint à démontrer géométriquement la loi de la réfraction $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$, Fermat fut littéralement fasciné : *[...] j'ai trouvé que mon principe donnait justement et précisément la même proportion des réfractions que M. Descartes a établie.*

En 1744, Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759) énonça pour la première fois ce qu'il nomma le "*principe de la moindre quantité d'action*" pour la mécanique. Il avait introduit en 1730 les idées de Newton en France. L'énoncé et la justification proposés initialement par Maupertuis sont très confus, mais il s'agit d'une date historique dans l'évolution des idées en physique et, à l'époque, dans la philosophie.

Poursuivant les travaux de Fermat, Maupertuis comprit que, dans des conditions bien déterminées, les équations de Newton sont équivalentes au fait qu'une quantité, qu'il nomma *l'action*, soit minimale. Selon ses propre termes :

> *L'Action est proportionnelle au produit de la masse par la vitesse et par l'espace. Maintenant, voici ce principe, si sage, si digne de l'être suprême : Lorsqu'il arrive quelque changement dans la Nature, la quantité d'Action employée pour ce changement est toujours la plus petite qu'il soit possible.*

Pour une particule de masse m, de vitesse $\mathbf{v}$, l'action de Maupertuis est donc le produit de trois facteurs, la masse, la vitesse, et la distance parcourue. La formulation et la démonstration du *Principe de moindre action* de Maupertuis furent (heureusement) données peu après par Leonard Euler (1707-1783), son ami.

Ces principes eurent un grand retentissement au XVIII^e siècle. Que les lois de la nature puissent se déduire de principes d'optimisation, c'est-à-dire d'équilibre entre causes en conflit, ne pouvait que frapper les esprits au siècle des lumières. Le "principe d'économie naturelle" fascinait. Il réalisait le meilleur accord entre différentes lois de la nature en opposition, voire en conflit. On le rattachait volontiers au principe du "meilleur" de Leibniz.

6. Il avait notamment entretenu une correspondance avec Étienne Pascal, père de Blaise, et Roberval sur l'équilibre mécanique.

Finalement, nous nous tournerons vers un cas complètement analogue dans son esprit, mais qui fascine par la quantité et la puissance de ses conséquences, car il s'agit d'un système complexe, par comparaison avec la simplicité de l'hypothèse de départ. Il s'agit du fondement de la thermodynamique statistique. En introduisant le *principe d'équiprobabilité des configurations*, nous verrons émerger une définition extrêmement simple de la notion de *température*, accompagnée de sa propriété première qu'est l'égalisation des températures de systèmes en contact thermique. Puis, nous aboutirons à la définition statistique et absolue de *l'entropie*, due à Boltzmann. Cela nous mènera au principe étonnamment simple :

> L'équilibre thermodynamique correspond à une situation qui maximise l'entropie, c'est à dire le désordre, compte tenu des contraintes.

La portée de ce résultat dépasse le cadre de la physique. Il a notamment constitué, on peut le comprendre, une des pierres angulaires dans la construction de modèles économiques. [7] Ce résultat est également à la base du développement de la Théorie de l'Information de Claude Shannon en 1948.

La période moderne, d'Euler et Lagrange à Hamilton

Nous entrons alors dans la période moderne, car les principes variationnels n'ont cessé, depuis, de produire des résultats physiques de plus en plus riches.

Mécanique analytique de Lagrange-Euler

Nous verrons, au chapitre 2, l'apport de Leonhard Euler (1707-1783) et Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), dont les travaux furent poursuivis par William R. Hamilton (1805-1865), qui en posèrent les fondements mathématiques. Ils sont les pères de l'une des pierres angulaires de la physique théorique contemporaine.

Les conséquences de cette vision de la physique se retrouvent aux sources de la relativité générale d'Einstein aussi bien que des théories modernes des interactions fondamentales.

L'outil mathématique central en est le *calcul variationnel.* On le doit à Euler qui en avait compris le fonctionnement et à Lagrange qui, en 1766, y apporta une contribution décisive. [8] Le calcul variationnel est un pan étonnant des mathématiques, tant par son côté fédérateur que par le nombre de questions auxquelles il a permis de répondre.

Euler publia en 1744 son traité *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudens*, qui fondait le calcul des variations, dans la lignée des travaux de Jacques et Jean Bernoulli (l'ouvrage eut une influence considérable sur Lagrange). C'est dans ce travail qu'Euler justifia *a posteriori* le principe de moindre action de son ami Maupertuis.

---

7. Voir, par exemple, Paul Samuelson, [6], dont la thèse, *Foundations of Economics Analysis* repose sur la thermodynamique chimique de Willard Gibbs.

8. Euler, qui était malvoyant depuis l'âge de 28 ans, devint complètement aveugle en cette même année 1766. Il reçut, en 1754, la visite du jeune Lagrange qui lui exposa ses travaux. Emerveillé par le talent de ce jeune homme, il dissimula un temps ses propres résultats, pour que le mérite en revienne au seul Lagrange. C'est un exemple, à peu près unique et maintenant disparu, de courtoisie humaine et de passion pour la science.

Lagrange était particulièrement doué et précoce. La réaction favorable d'Euler à ses travaux l'encouragea et, en 1756, il appliqua ses techniques au principe de moindre action sous une forme qui en fait le fondement de la mécanique et de la physique théorique moderne.

Une des contributions majeures de Lagrange est sa *Mécanique analytique* où il effectue la synthèse de l'ensemble des méthodes de statique et de dynamique qu'il avait développées antérieurement. L'ouvrage, achevé en 1782, ne parut qu'en 1788 à Paris. La mécanique de Lagrange est aussi importante dans l'histoire de la physique, de la mécanique et des mathématiques que la mécanique céleste de Newton.

L'apport de William Hamilton

Ces travaux seront le point de départ de toutes les recherches ultérieures, notamment ceux d'Hamilton, qui les qualifiera de "poème scientifique écrit par le Shakespeare des mathématiques". C'est en effet Hamilton qui baptisa cette théorie du nom de Lagrange.

Le chapitre 3 nous mènera à l'étape suivante et à la formulation dite *canonique* de la mécanique analytique, due à Hamilton. Ce formalisme canonique, qui date de 1834, repose non pas sur les variables et leurs dérivées temporelles $(x, \dot{x})$ mais sur les "moments conjugués" (x, p). Il est plus commode pour un certain nombre de problèmes, notamment la mécanique du point ou d'ensembles de points. Mais il est surtout d'une richesse impressionnante par ses développements tant mathématiques que physiques et sa capacité à faire ressortir les symétries des problèmes. Nous ferons allusion à quantité de retombées des travaux d'Hamilton, notamment en présentant quelques aspects des *systèmes dynamiques*. Ce type de problème physique a, en effet, été une extraordinaire source de découvertes tant en mathématiques qu'en physique. Le fondateur de ce champ d'étude est Henri Poincaré, en 1885, notamment quand il a étudié le problème des 3 corps. Cela mène à des problèmes fascinants : les problèmes limites à $t = \infty$, les attracteurs et les attracteurs étranges, les bifurcations, le chaos etc. L'attracteur étrange le plus célèbre est sans doute l'attracteur de Lorenz, du nom de son inventeur Edward N. Lorenz qui le découvrit en 1963 à partir d'un modèle mathématique de l'atmosphère, et relança de façon spectaculaire, avec l'effet "aile de papillon" en météorologie, l'intérêt pour le *chaos*, inventé par Poincaré 80 ans plus tôt.

Mécanique et optique ondulatoire de W. Hamilton

Nous parviendrons ensuite naturellement, au chapitre 4, à l'étonnante découverte de la relation entre la mécanique analytique et l'optique ondulatoire, qu'Hamilton avait devinée.

Entre 1825 et 1828, il présente la théorie d'une fonction unique, la *fonction caractéristique*, qui unifie mécanique, optique et mathématiques et qui va l'aider à établir la théorie ondulatoire de la lumière.

Hamilton est fasciné par l'*action* et par le principe de Fermat. Il comprend que c'est un principe d'action *stationnaire* et non minimale. Le principe variationnel, également appelé principe d'Hamilton, est l'élément essentiel de ces articles. Nous décrirons les résultats d'Hamilton sur l'optique géométrique, où il choisit de travailler directement avec *l'action* sous la forme de sa fonction caractéristique $\mathcal{S}$, fonction des variables canoniques (x, p). Hamilton a formalisé le fait que l'optique géométrique est une limite de l'optique ondulatoire à faible longueur d'onde, et nous verrons sa similitude de structure étonnante avec la mécanique.

Théorie des champs lagrangienne

Au chapitre 5, nous présenterons la formulation lagrangienne de la théorie des champs. Le formalisme lagrangien trouve sa pleine puissance lorsque l'on traite de systèmes ayant un nombre de degrés de liberté très grand, voire infini.

Période contemporaine

Mouvement dans un espace courbe

Le chef-d'œuvre d'Einstein qu'est la relativité générale repose sur l'observation étonnante que deux grandeurs physiques qui n'ont *a priori* aucun rapport, sont égales (ou strictement proportionnelles). Il s'agit, on le sait, des deux acceptions du concept de masse. L'une est celle de coefficient d'inertie ou de résistance à l'accélération d'un corps dans les lois de la dynamique, l'autre est celle de coefficient de couplage au champ de gravitation. Aucun argument *a priori* n'explique le pourquoi de cette égalité. Dans un champ gravitationnel, l'égalité de la masse inertielle et de la masse pesante élimine la masse d'un corps des équations du mouvement. Par *Principe d'équivalence*, deux corps placés dans les mêmes conditions initiales ont le même mouvement, quelle que soit leur masse.

L'idée qui sous-tend la relativité générale est que cette égalité devient naturelle si le mouvement que nous nommons "gravitationnel" est, de fait, un mouvement *libre* dans un espace-temps *courbe*.

Nous verrons dans le chapitre 6, le problème du mouvement d'une particule libre dans un espace courbe, avec le but d'utiliser le formalisme lagrangien pour montrer comment l'idée de mouvement dans un espace courbe fournit des éléments pour construire une théorie où l'égalité des "deux" masses est réalisée de façon naturelle.

Nous montrerons trois conséquences historiques : la variation de la marche d'une horloge dans un champ gravitationnel, les corrections à la mécanique céleste newtonienne et la déviation de la lumière par le champ gravitationnel.
Ces exemples sont historiques, ils sont également d'une grande actualité. La gestion du temps est devenu un problème quotidien de la vie de notre époque (le système GPS). Comme nous le verrons, la déflexion de la lumière par un champ de pesanteur joue un rôle considérable en astrophysique et en cosmologie au travers de l'effet de lentille gravitationnelle. Cet effet est celui d'un télescope cosmique naturel.

Ondes gravitationnelles

Au chapitre 7, nous aborderons réellement la relativité générale en décrivant un des plus grands résultats de la physique du XXI[e] siècle : la détection quantitative des ondes gravitationnelles, émises par des masses accélérées. Cette vérification a eu lieu un siècle après la proposition d'Einstein elle-même. Le premier événement détecté l'a été le 14 septembre 2015 par la collaboration internationale LIGO-Virgo. Ces résultats ont été couronnés par l'attribution du prix Nobel de physique 2017 à Rainer Weiss, Barry C. Barish et Kip Thorne. Il s'agissait, en l'occurrence, d'ondes émises par des système binaires en rotation, en l'occurrence de deux trous noirs quelques instants avant leur fusion en un unique congénère. Double découverte !

Une première preuve d'émission d'ondes gravitationnelles a été reconnue lors de la remise du prix Nobel 1993 à Joseph H. Taylor, et Russell A. Hulse "Pour la découverte d'un nouveau type de pulsar, qui a ouvert de nouvelles possibilités pour l'étude de la gravitation". C'était un résultat d'une exceptionnelle précision sur un phénomène totalement inattendu. D'une part Taylor et Hulse avaient découverte le premier exemple d'un pulsar double, d'autre part la rotation de ce système émet une énergie gravitationnelle si importante que sa période de rotation diminue au cours du temps avec une précision identique à celle des meilleurs calculs théoriques de la Relativité Générale.

Les ondes gravitationnelles quadrupolaires se propagent à la vitesse de la lumière, mais ce sont des ondes de l'espace-temps, c'est-à-dire du milieu qui les porte, et, à l'endroit de la détection, leur amplitude, mesurée par le rapport de la variation de distance relative (de temps propre pour être précis) de deux points du détecteur, est de l'ordre de 10^{-21} (ordre de grandeur relatif d'un atome par rapport à la distance Terre-Soleil), et la mise au point des dispositifs de détection est en soi un prodige.

Mécanique quantique variationnelle de Feynman

Le chapitre 8 porte sur la formulation variationnelle de la mécanique quantique due à Feynman.

En 1941, celui-ci découvre un texte de 1932 de Dirac où se trouve une idée remarquable qui va lui permettre de construire une formulation variationnelle, complètement nouvelle, de la mécanique quantique non relativiste. Dans ce travail, il introduit le concept mathématique des intégrales de chemins, qui n'a cessé d'être développé depuis. Ce sera le sujet de sa thèse, soutenue en mai 1942 et ne fut publiée qu'après la fin de la guerre.

Dirac avait, comme Schrödinger et Louis de Broglie, relu les articles de Hamilton, et notamment médité sur la fonction caractéristique et le lien entre l'optique géométrique et la mécanique classique. Il était intéressé par la phase et le rapport de l'action et de la constante universelle de Planck $\hbar$, dans l'expression $exp(iS/\hbar)$, semblable à la fonction caractéristique de Hamilton en optique. Mais il n'avait pas su faire un calcul essentiel.

Feynman résolut le problème et fit une formulation de la mécanique quantique à partir des seules hypothèses de l'existence d'amplitudes de probabilité, du principe de superposition et de cette version quantique de la fonction caractéristique. Il pouvait ainsi déduire de ce schéma la forme et l'algèbre des observables et l'équation d'évolution, en écrivant l'amplitude de probabilité d'un processus comme la superposition des amplitudes provenant de la totalité des chemins quantiques possibles, généralisation des interférences par les trous d'Young à l'ensemble, infini, des trajectoires possibles. La somme de toutes les amplitudes réalisant le processus considéré est un objet mathématique compliqué que l'on nomme une *intégrale de chemins*, sur laquelle repose tout le formalisme.

Feynman montre que l'on obtient ainsi les relations d'Einstein et de Broglie, ainsi que l'équation de Schrödinger, l'algèbre des observables et toute la mécanique quantique traditionnelle. D'innombrables résultats ont été obtenus, cet outil joue un rôle central dans la théorie quantique des champs contemporaine.

Si l'on considère des systèmes et processus où l'action S classique est *macroscopique*, c'est-à-dire beaucoup plus grande que la constante de Planck $\hbar$, la contribution de chemins qui peuvent paraître très proches l'un de l'autre au sens classique, mais tels que la différence de l'action calculée sur ces chemins soit, elle aussi, beaucoup plus grande que $\hbar$, va être, avec une forte probabilité, en interférence destructive. La contribution de l'ensemble de tels chemins est alors nulle. Autrement dit, dans ces conditions, seul contribue un voisinage infinitésimal de la *trajectoire classique*, impossible à scruter expérimentalement dans son détail, du moins pour le moment. La "probabilité" de la trajectoire classique est par conséquent égale à un. Ainsi, la mécanique classique est la limite de la mécanique quantique lorsque $\hbar$ est faible par rapport aux grandeurs d'un problème.

CHAPITRE 1

Principes variationnels

Les principes variationnels présentent les phénomènes naturels comme des processus d'optimisation. Un exemple simple en est la propagation des rayons lumineux entre plusieurs miroirs observée par Héron d'Alexandrie.

Dans des cas plus complexes, ces phénomènes apparaissent comme provenant de compromis entre les effets de diverses causes en conflit. Cette forme des idées d'Héron d'Alexandrie ne parvint dans la physique moderne que 15 siècles plus tard avec Pierre de Fermat (1601-1665) et le principe qu'on lui doit en optique ; elle prit son essor avec l'épanouissement du calcul différentiel, prolongé par le *calcul variationnel* développé en mécanique par Leonard Euler (1707-1783) et Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) au XVIIIe siècle à la suite des idées de Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759) sur le "Principe de moindre action". Cela fut accompagné par une importante collaboration de mathématiciens, des frères Bernoulli, à Leibniz, Newton, Jacobi, Hamilton [1].

En Physique, ce qui a été de plus en plus étonnant dans cette vision des principes est double. D'une part, ils présentent les structures et processus naturels comme résultant d'un *principe d'optimalité*, de l'autre, ils sont *universels*. Toutes les lois physiques peuvent s'exprimer sous cette forme globale qui, à l'analyse, permet de retrouver les lois locales comme la loi de Newton sur la proportionnalité de la force et de l'accélération d'un corps en mécanique, ou la loi de Coulomb sur la force entre deux charges électriques. La profondeur de cette approche, plus riche et plus puissante, étend les lois locales, et dégage les principes fondamentaux qui les sous-tendent. Dans la physique fondamentale, la physique quantique, les particules élémentaires ou la relativité générale, ce sont les lois de symétrie et d'invariance qui structurent la construction des théories.

Dans ce chapitre, nous examinerons trois exemples importants et l'outil mathématique nécessaire à leur formalisation. Dans la section 1.1, nous revenons sur le principe de Fermat, et notamment la démonstration par ce dernier des lois de la réflexion et de la réfraction. Fermat ne connaissait pas la vitesse de la lumière et les indices de réfraction. En supposant que le temps mis par la lumière à parcourir une certaine distance dans un milieu est augmenté par la "résistance" de ce milieu au passage de la lumière, Fermat énonça à la fin de 1661 son *principe de moindre temps* qu'il appela "principe d'économie naturelle". Ce principe explique directement, nous le verrons, les *rayons courbes*, responsables des phénomènes de mirages, qui sont absents des lois de Snell-Descartes.

1. Le sujet est amplement traité par Jean-Pierre Bourguignon dans la référence [7].

Jean-Louis Basdevant

Principes variationnels de la physique

Les Principes variationnels présentent les phénomènes naturels comme des problèmes d'optimisation sous contraintes car les lois de la physique résultent d'un équilibre optimal entre des causes en conflit. Nés des idées de Fermat et de Maupertuis aux XVIIe et XVIIIe siècles, ils ont été façonnés par des mathématiciens d'exception comme Euler et Lagrange, puis Hamilton, et unifient les fondements structurels entre les disciplines de la physique. Ce manuel est destiné aux étudiants en master comme aux élèves des écoles d'ingénieurs. La mécanique de Lagrange est développée jusqu'à l'incorporation de la relativité restreinte. Elle est suivie du formalisme canonique de Hamilton, avec sa découverte de la similitude de l'optique géométrique et de la mécanique classique, et quelques exemples des étonnants résultats des mathématiciens sur les systèmes dynamiques et la théorie du chaos. Après avoir décrit la formulation de la théorie des champs, le texte traite du mouvement dans un espace courbe, berceau de la relativité générale, avec les applications à l'optique gravitationnelle. Cela mène directement à la détection en 2015 des ondes gravitationnelles, un des très grands exploits expérimentaux et théoriques de notre époque. Enfin, le texte décrit la formulation de Feynman de la mécanique quantique par les intégrales de chemins, inspirée des résultats de Hamilton, qui simplifie les fondements et donne un lien direct entre mécanique quantique et classique.

Ce livre expose dans un style vivant l'évolution accélérée de la physique moderne depuis ses débuts au XVIIe siècle avec le Principe de Fermat en optique, jusqu'au triomphe intellectuel et technologique de la détection en 2015 des ondes gravitationnelles prévues par Einstein un siècle auparavant.

Ancien élève de l'École normale supérieure, Professeur honoraire à l'École Polytechnique, où il a présidé le département de physique, Directeur de recherche au CNRS, **Jean-Louis Basdevant** est spécialiste de physique des particules élémentaires, de théorie des champs et d'astrophysique. Il est l'auteur de plusieurs ouvrages de référence traduits dans le monde entier.

ISBN : 978-2-8073-3981-1

9 782807 339811

deboeck SUPÉRIEUR

www.deboecksuperieur.com

Conception graphique : Primo&Primo®